21. «Найбільше значення»

Нехай $n \geqslant 2$. Знайдіть найбільше значення виразу

$$\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, які задовольняють умову $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Обозначим G среднее геометрическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т.е. $G=\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$. По условию $G=1$. Покажем, что в более общем случае, а именно при $G \le 2$, (предполагая, как и раньше, все a_k положительными),

$$\max \frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\sqrt{1+\frac{1}{G^2}}. \qquad (1)$$

Поскольку при $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$ получаем $G=a$ и $\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}=\sqrt{1+\frac{1}{G^2}}$, то достаточно доказать, что при $G \le 2$ выполнено неравенство

$$\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \le \sqrt{1+\frac{1}{G^2}}. \qquad (2)$$

Введём новые переменные $t_k=\ln a_k$. Тогда неравенство (2) перепишется в виде $\frac{\sqrt{e^{2t_1}+1}+\sqrt{e^{2t_2}+1}+\ldots+\sqrt{e^{2t_n}+1}}{e^{t_1}+e^{t_2}+\ldots+e^{t_n}} \le \sqrt{1+\frac{1}{G^2}}$, или

$$\sqrt{e^{2t_1}+1}+\sqrt{e^{2t_2}+1}+\ldots+\sqrt{e^{2t_n}+1} \le \sqrt{1+\frac{1}{G^2}}\left(e^{t_1}+e^{t_2}+\ldots+e^{t_n}\right). \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию $f(t):=\sqrt{1+\frac{1}{G^2}}e^t-\sqrt{e^{2t}+1}$.

Её вторая производная равна $\sqrt{1+\frac{1}{G^2}}e^t-\frac{e^{4t}+2e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}+1}^3}$. Но, поскольку $0<G\le 2$, то $\sqrt{1+\frac{1}{G^2}}e^t-\frac{e^{4t}+2e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}+1}^3} \ge \sqrt{\frac{5}{4}}e^t-\frac{e^{4t}+2e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}+1}^3}$. Покажем, что

$$\sqrt{\frac{5}{4}}e^t-\frac{e^{4t}+2e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}+1}^3}>0. \qquad (4)$$

Перепишем это неравенство в виде $\sqrt{5}\sqrt{e^{2t}+1}^3>2\left(e^{3t}+2e^t\right)$ и возведём обе части в квадрат:

$$5e^{6t}+15e^{4t}+15e^{2t}+5>4e^{6t}+16e^{4t}+16e^{2t}. \qquad (5)$$

Вычитая из левой части неравенства (5) правую получаем $e^{6t}-e^{4t}-e^{2t}+5>0$, что верно, поскольку $e^{6t}-e^{4t}-e^{2t}+5=\left(e^{2t}-1\right)^2\left(e^{2t}+1\right)+4.$

Таким образом показано, что $f''(t)>0$, т.е. функция $f(t)$ выпукла. Следовательно, по неравенству Иенсена, $f(t_1)+f(t_2)+\ldots+f(t_n)\ge nf\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right)$, т.е.

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{G^2}}\left(e^{t_1}+e^{t_2}+\ldots+e^{t_n}\right)-\sqrt{e^{2t_1}+1}+\sqrt{e^{2t_2}+1}+\ldots+\sqrt{e^{2t_n}+1}\ge$$

$$\ge\sqrt{1+\tfrac{1}{G^2}}e^{\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}}-\sqrt{e^{2\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}}+1}=\sqrt{1+\tfrac{1}{G^2}}G-\sqrt{G^2+1}=0.$$

Таким образом, неравенство (3), а значит и неравенство (2), доказано.

Замечание 1. При произвольном G неравенство (2) может и не выполняться. Например, при $a_1=a_2=8,\ a_3=\sqrt{8}$ получаем:

$G=\sqrt{32};$

$\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\sqrt{a_3^2+1}}{a_1+a_2+a_3}=\frac{2\sqrt{65}+3}{16+\sqrt{8}}\approx 1.015725604;$

$\sqrt{1+\frac{1}{G^2}}=\sqrt{\frac{33}{32}}\approx 1.015504801<1.015725604.$

Замечание 2. Наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ можно выразить через другие средние. А именно:

если фиксирована сумма $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$, то

$$\max\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\sqrt{1+\frac{1}{H^2}}, \qquad (7)$$

где $H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ — среднее гармоническое чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$;

если фиксирована сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$, то

$$\min\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\sqrt{1+\frac{1}{A^2}}, \qquad (8)$$

где $A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ — среднее арифметическое чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Как и раньше, для доказательства этого достаточно доказать неравенства

$$\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\le\sqrt{1+\frac{1}{H^2}} \qquad (9)$$

и

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}\ge\sqrt{1+\tfrac{1}{A^2}}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right). \qquad (10)$$

Для доказательства неравенства (9) воспользуемся весовым неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\frac{c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots+c_n\xi_n}{c_1+c_2+\ldots+c_n} \le \sqrt{\frac{c_1\xi_1^2+c_2\xi_2^2+\ldots+c_n\xi_n^2}{c_1+c_2+\ldots+c_n}},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные положительные числа.

При $c_k = a_k$ и $\xi_k = \sqrt{1+\frac{1}{a_k^2}}$ получаем

$$\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \le \sqrt{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}} = \sqrt{1+\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}}. \qquad (11)$$

Поскольку $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$ (это эквивалентно неравенству между средним арифметическим и средним гармоническим), то

$$\sqrt{1+\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}} \le \sqrt{1+\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\cdot\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)}{n^2}} = \sqrt{1+\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)^2}{n^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{H^2}}.$$

Таким образом, неравенство (9) доказано.

Докажем теперь неравенство (10).

Заметим, что $\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}$ это длина ломаной соединяющей последовательно точки $(0;0), (a_1;1), (a_1+a_2;2), \ldots, (a_1+a_2\ldots+a_n;n)$. В то же время $\sqrt{1+\frac{1}{A^2}}(a_1+a_2+\ldots+a_n) = \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+n^2}$ — длина отрезка, соединяющего точки $(0;0)$ и $(a_1+a_2\ldots+a_n;n)$. И, поскольку ломаная не может быть короче отрезка, соединяющего те же точки, то неравенство (10) выполнено.