Задача #5.

5.1.

Не существует не только многочлена, но и вообще никакой функции f, удовлетворяющей равенству $f(x+x^2)=x+x^2+x^3+\ldots+x^{2014}$.

Действительно, в противном случае выполнялось бы равенство:

$$2014=1+1^2+1^3+\ldots+1^{2014}=f(1+1^2)=f(2)=$$
$$=f((-2)+(-2)^2)=(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\ldots+(-2)^{2014}=\tfrac{2^{2015}-2}{3},$$

что, очевидно, неверно.

Противоречие.

5.2.

Не существует

Предположим, что искомый многочлен существует. Тогда равенство $P(x+x^2+x^3)=x+x^2+x^3+\ldots+ax^{2011}+bx^{2012}+x^{2013}$ выполняется не только при действительных x, но и при комплексных.

Поскольку

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^{2011}+x^{2012}+x^{2013}=(x+x^2+x^3)(1+x^3+x^6+\ldots+x^{2010}),$$

то $x+x^2+x^3+\ldots+x^{2011}+x^{2012}+x^{2013}=0$ при $x+x^2+x^3=0$. Следовательно, при таких значениях x

$$x+x^2+x^3+\ldots+ax^{2011}+bx^{2012}+x^{2013}=(a-1)x^{2011}+(b-1)x^{2012}.$$

Уравнение $x+x^2+x^3=0$ имеет корни 0, $\tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ и $\tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Поэтому должны выполняться равенства:

$$\begin{cases}\left(\tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{2011}(a-1)+\left(\tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{2012}(b-1)=0\cdot(a-1)+0\cdot(b-1)\\ \left(\tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{2011}(a-1)+\left(\tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{2012}(b-1)=0\cdot(a-1)+0\cdot(b-1),\end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases}\tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}(a-1)+\tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}(b-1)=0\\ \tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}(a-1)+\tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}(b-1)=0.\end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $a=1,\ b=1$. Т.е. искомый многочлен может существовать только при $a=b=1$. Но, в этом случае:

$$-1=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{2013}=P(-1+(-1)^2+(-1)^3)=$$
$$=P(-1)=P(i+i^2+i^3)=i+i^2+i^3+\ldots+i^{2013}=i,$$

что, очевидно, неверно.

Противоречие.

Задача #19.

Ответ: A — произвольный отрезок (возможно, вырожденный в точку), т.е. множество вида $A=[\alpha,\beta]$, где $0\le\alpha\le\beta\le 1$.

1. Пусть $u<v<w$ и $f(u)=g(u)$ и $f(w)=g(w)$. Тогда и $f(v)=g(v)$.

Поскольку функция g монотонна, то $|g(u)-g(v)|+|g(v)-g(w)|=$ $=|g(w)-g(v)|$. Следовательно: $|f(u)-f(v)|+|f(v)-f(w)|\ge$ $\ge|f(w)-f(v)|=|g(u)-g(v)|+|g(v)-g(w)|$ (неравенство треугольника) и при этом $|f(u)-f(v)|\le|g(u)-g(v)|$ и $|f(v)-f(w)|\le|g(v)-g(w)|$. В таком случае $|f(u)-f(v)|=|g(u)-g(v)|$ и $|f(v)-f(w)|=|g(v)-g(w)|$, и, следовательно, $f(v)=g(v)$.

2. Поскольку функция g монотонна и отображает отрезок на связное множество, то она непрерывна. А т.к. при этом выполнено условие $\forall u,v:|f(u)-f(v)|\le|f(u)-f(v)|$, то функция f также непрерывна. Следовательно множество A замкнуто. А т.к. оно вместе с любыми двумя точками содержит и все промежуточные, то это отрезок (возможно, вырожденный в точку или пустое множество).

3. Если функция g неубывающая, то $g(0)=0\le f(0)$ и $g(1)=1\ge f(0)$. Тогда, вследствие непрерывности функций f и g, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решение, т.е. множество A не пустое.

Аналогично, если функция g невозрастающая, то $g(0)=1\ge f(0)$ и $g(1)=0\le f(0)$. Снова, вследствие непрерывности функций f и g, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решение, т.е. множество A так же не пустое.

Таким образом, множество A может быть только отрезком (возможно, вырожденным в точку).

4. Пусть $0\le\alpha\le\beta\le 1$. Тогда существуют функции f и g, удовлетворяющие условию задачи, для которых $A=[\alpha,\beta]$.

Действительно, в качестве искомых функций можно взять $g(x)=x$ и

$$f(x)=\begin{cases}\alpha, & 0\le x\le\alpha\\ x, & \alpha\le x\le\beta\\ \beta, & \beta\le x\le 1.\end{cases}$$

Задача #7.

Ответ: множество точек, лежащих за пределами (замкнутого) шара радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$ с центром $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, т.е. шара, диаметром которого является отрезок с концами $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$.

Заметим, что при $x > 0$ и $n > 1$ всегда $x^{n+1} - x^n \geq x^2 - x$.

Действительно: $(x^{n+1} - x^n) - (x^2 - x) = x(x-1)(x^{n-1} - 1) \geq 0$.

Следовательно, $(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) - (a^n + b^n + c^n) \geq (a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)$. Таким образом, последовательность u_n возрастает в том и только том случае, если $(a^2 + b^2 + c^2) > (a + b + c)$, т.е. $(a - \frac{1}{2})^2 + (b - \frac{1}{2})^2 + (c - \frac{1}{2})^2 > \frac{3}{4}$. А это условие задаёт множество точек, лежащих за пределами (замкнутого) шара радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$ с центром $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, т.е. шара, диаметром которого является отрезок с концами $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$.

Обобщение.

Последовательность u_n возрастает, начиная с некоторого номера, в том и только том случае, если хотя бы одно из чисел a, b, c больше 1.

Заметим, что при $x > 0$ и $n > m$ всегда $x^{n+1} - x^n \geq x^{m+1} - x^m$.

Следовательно, $(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) - (a^n + b^n + c^n) \geq (a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1}) - (a^m + b^m + c^m)$. Таким образом, последовательность u_n возрастает, начиная с некоторого номера, в том и только том случае, если найдётся m, при котором $(a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1}) > (a^m + b^m + c^m)$. Заметим, что если все числа a, b, c не превосходят 1, то $(a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1}) \leq (a^m + b^m + c^m)$ при всех m. В то же время, если хотя бы одно из чисел a, b, c больше 1, то $\lim\limits_{n \to \infty}(a^n + b^n + c^n) = \infty$, и, следовательно, найдётся такое m, при котором $(a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1}) > (a^m + b^m + c^m)$.

Задача #11.

Ответ: $p \in \{3, 23, 71\}$.

Перепишем уравнение $37p^2 - 47p + 4 = n^2$ в виде $p(37p - 47) = = n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$. Поскольку p — простое число, то одно из чисел $(n+2)$ и $(n-2)$ кратно p. Таким образом либо $\begin{cases} n+2 = kp \\ n-2 = \frac{37p-47}{k} \end{cases}$ либо $\begin{cases} n-2 = kp \\ n+2 = \frac{37p-47}{k}, \end{cases}$ т.е. $kp - \frac{37p-47}{k} = \pm 4$. Следовательно, $p = \frac{47 \pm 4k}{37-k^2}$.

При $6 < k < 12$: $\frac{47 \pm 4k}{37-k^2} < 0$.

При $k \geq 12$: $\frac{47+4k}{37-k^2} < 0$ и $\frac{47-4k}{37-k^2} < 1$.

При нечётном k: $47 \pm 4k$ нечётное, а $37 - k^2$ — чётное.

Таким образом, остаётся 3 возможных значения k.

При $k = 2$: $\frac{47-4k}{37-k^2} = \frac{13}{11}$; $\frac{47+4k}{37-k^2} = \frac{5}{3}$.

При $k = 4$: $\frac{47-4k}{37-k^2} = \frac{31}{21}$; $\frac{47+4k}{37-k^2} = 3$.

При $k = 6$: $\frac{47-4k}{37-k^2} = 23$; $\frac{47+4k}{37-k^2} = 71$.

Задача #8.

Ответ: $f(x) = cx^2$, где $c = f(1)$ — произвольная константа.

Пусть $a = \sqrt{2}^n \cdot \sqrt{3}^m$, где n и m — произвольные целые числа. Тогда $f(ax) = a^2 f(x)$. (В частности, $f(a) = a^2 f(1)$.)

Для доказательства этого достаточно показать, что $f(\sqrt{2}x) = 2f(x)$ и $f(\sqrt{3}x) = 3f(x)$.

1) $f(\sqrt{2}x) = f(\sqrt{2}x\cos\frac{\pi}{4}) + f(\sqrt{2}x\sin\frac{\pi}{4}) = f(x) + f(x)$.

2) $4f(x) = 2f(\sqrt{2}x) = f(2x) = f(2x\cos\frac{\pi}{6}) + f(2x\sin\frac{\pi}{6}) = f(\sqrt{3}x) + f(x)$.

Следовательно $f(\sqrt{3}x) = 3f(x)$.

Поскольку множество чисел вида $a = \sqrt{2}^n \cdot \sqrt{3}^m$ всюду плотное в $\mathbb{R}_+$ и функция $f(a) = a^2 f(1)$ непрерывна, то из монотонности этой функции на некотором интервале $0 < \alpha < t < \beta$ следует, что на всём этом интервале $f(t) = t^2 f(1)$. Но каждое положительное число x может быть представлено в виде $x = at$, где $a = \sqrt{2}^n \cdot \sqrt{3}^m$ и $\alpha < t < \beta$. Следовательно равенство $f(x) = f(at) = a^2 f(t) = a^2 t^2 f(1) = x^2 f(1)$ выполняется при всех $x > 0$.

Кроме того, $f(0) = f(\sqrt{2}\cdot 0) = 2f(0)$, и, следовательно, $f(0) = 0 = f(1)\cdot 0^2$.

Таким образом, равенство $f(x) = f(1)\cdot x^2$ выполнено при всех $x \geq 0$.

Задача #16.

Ответ: $k \in \{1, 13, -1, -13,\}$.

Возьмём $y_1 = \frac{\pi}{k}$ и $y_2 = -\frac{\pi}{k}$. Тогда $\cos(x + ky_1) = \cos(x + ky_2)$ и $\cos y_1 = \cos y_2$.

Следовательно, при всех x, выполнено равенство

$$\cos(20x + 13y_1) = P(\cos x, \cos y_1, \cos(x + ky_1)) =$$

$$= P(\cos x, \cos y_2, \cos(x + ky_2)) = \cos(20x + 13y_2),$$

т.е. $\cos(20x + \frac{13\pi}{k}) \equiv \cos(20x - \frac{13\pi}{k})$. Таким образом, $\frac{13}{k}$ — целое число, т.е. $k \in \{1, 13\}$.

Покажем теперь, что при $k = 1$ и при $k = 13$ искомые многочлены существуют.

Заметим, что при натуральном n: $\cos(nx) = Q_n(\cos x)$ и $\sin(nx) = \sin x \cdot R_n(\cos x)$, где Q_n и R_n — некоторые многочлены. (Это можно доказать индукцией по n.)

1. $k = 1$.

$$\cos(20x + 13y) = \cos 20x \cdot \cos 13y - \sin 20x \cdot \sin 13y =$$

$$= Q_{20}(\cos x) \cdot Q_{13}(\cos y) - \sin x \cdot \sin y \cdot R_{20}(\cos x) \cdot R_{13}(\cos y) =$$

$$= Q_{20}(\cos x) \cdot Q_{13}(\cos y) - (\cos x \cdot \cos y - \cos(x + y)) \cdot R_{20}(\cos x) \cdot R_{13}(\cos y).$$

2. $k = 13$.

$$\cos(20x + 13y) = \cos 20x \cdot \cos 13y - \sin 20x \cdot \sin 13y =$$

$$= Q_{20}(\cos x) \cdot Q_{13}(\cos y) - \sin x \cdot \sin 13y \cdot R_{20}(\cos x) =$$

$$= Q_{20}(\cos x) \cdot Q_{13}(\cos y) - (\cos x \cdot Q_{13}(\cos y) - \cos(x + 13y)) \cdot R_{20}(\cos x).$$

3. $k = -1$.

$$\cos(20x + 13y) = \cos 20x \cdot \cos 13y - \sin 20x \cdot \sin 13y =$$

$$= Q_{20}(\cos x) \cdot Q_{13}(\cos y) - \sin x \cdot \sin y \cdot R_{20}(\cos x) \cdot R_{13}(\cos y) =$$

$$= Q_{20}(\cos x) \cdot Q_{13}(\cos y) - (\cos(x - y) - \cos x \cdot \cos y) \cdot R_{20}(\cos x) \cdot R_{13}(\cos y).$$

4. $k = -13$.

$$\cos(20x + 13y) = \cos 20x \cdot \cos 13y - \sin 20x \cdot \sin 13y =$$

$$= Q_{20}(\cos x) \cdot Q_{13}(\cos y) - \sin x \cdot \sin 13y \cdot R_{20}(\cos x) =$$

$$= Q_{20}(\cos x) \cdot Q_{13}(\cos y) - (\cos(x - 13y) - \cos x \cdot Q_{13}(\cos y)) \cdot R_{20}(\cos x).$$